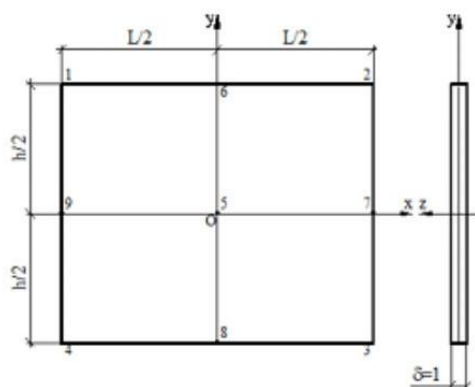


Упражнение №3. Решение плоской задачи теории упругости с помощью функции напряжений.



Дано:

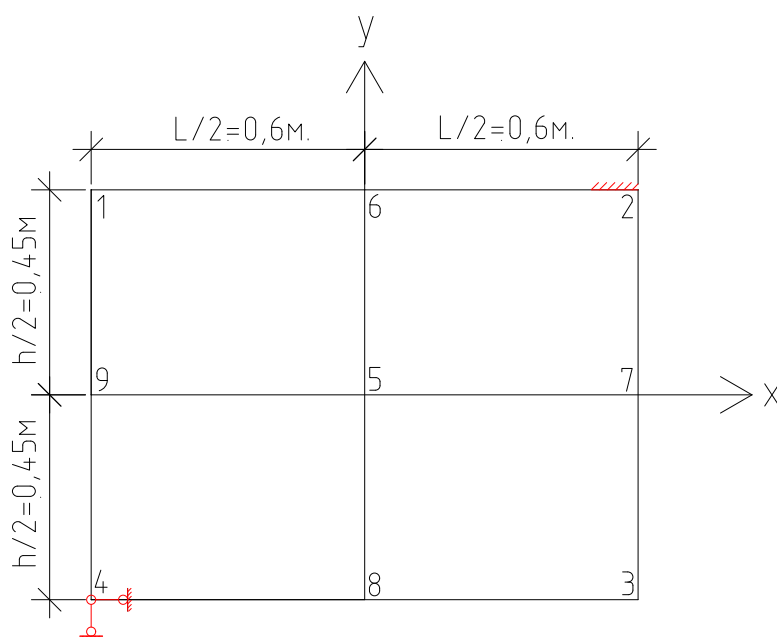
$$L := 1.2 \text{ М}, \quad h := 0.9 \text{ М}, \quad \nu := 0.24, \quad \varphi := 20x^3y, \quad \delta := 1$$

$$x_a := x_4, \quad y_a := y_4, \quad x_b := x_4, \quad y_b := y_4, \quad x_c := x_2, \quad y_c := y_2, \quad z(x, y) := \frac{d}{dx} \varphi(x, y)$$

$$u_a = 0, \quad v_b = 0, \quad z_c = 0$$

Вычислить перемещения точки с координатами (x_d, y_d)

$$x_d := x_1, \quad y_d := y_1$$



1. Проверим выполнение уравнения совместности деформаций.

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (1); \quad \varphi = 20x^3y;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 60x^2y; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 120xy; \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 120y; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 20x^3; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 60x^2; \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 120x; \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0;$$

Подставляя в уравнение совместности (1), убеждаемся, что оно удовлетворяется тождественно.

Найдем напряжения.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 120xy; \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -60x^2;$$

2. Вычисление поверхностных сил.

Грань 1-2.

Интервал изменения координат: $-0,6\text{м} \leq x \leq 0,6\text{м}; y = 0,45\text{м};$

Направляющие косинусы: $l = \cos 90^\circ = 0; m = \cos 0^\circ = 1;$

Интенсивность поверхностных сил:

$$\bar{X} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m = 0 - 60x^2 \cdot 1 = -60x^2;$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m = -60x^2 \cdot 0 + 120xy \cdot 1 = 120xy = 120 \cdot x \cdot 0,45 = 54x;$$

Функция $\bar{X}(x)$ нелинейная, поэтому вычисляем ее через $0,25L = 0,3\text{м};$

$$\bar{X}(-0,6) = -60 \cdot (-0,6)^2 = -21,6 \text{ МПа};$$

$$\bar{X}(-0,3) = -60 \cdot (-0,3)^2 = -5,4 \text{ МПа};$$

$$\bar{X}(0) = 0 \text{ МПа};$$

$$\bar{X}(0,3) = -60 \cdot 0,3^2 = -5,4 \text{ МПа};$$

$$\bar{X}(0,6) = -60 \cdot 0,6^2 = -21,6 \text{ МПа};$$

Зависимость $\bar{Y}(x)$ линейная, и для построения эпюры достаточно найти:

$$\bar{Y}(-0,6) = 54 \cdot (-0,6) = -32,4 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y}(0,6) = 54 \cdot 0,6 = 32,4 \text{ МПа};$$

Составляющие равнодействующей и момент относительно центра тяжести грани поверхностных сил будут равны:

$$R_{1-2}^x = \int_{-0,6}^{0,6} \bar{X} dx \delta = -60\delta \int_{-0,6}^{0,6} x^2 dx = -60\delta \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-0,6}^{0,6} = -20\delta \cdot (0,6^3 - (-0,6)^3) = -8,64\delta;$$

$$R_{1-2}^y = \int_{-0,6}^{0,6} \bar{Y} dx \delta = 54\delta \int_{-0,6}^{0,6} x dx = 54\delta \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-0,6}^{0,6} = 27\delta \cdot (0,6^2 - (-0,6)^2) = 0;$$

$$M_{1-2} = \int_{-0,6}^{0,6} (-\bar{Y})x dx \delta = -54\delta \int_{-0,6}^{0,6} x^2 dx = -54\delta \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-0,6}^{0,6} = -18\delta \cdot (0,6^3 - (-0,6)^3) \\ = -7,776\delta;$$

Грань 2-3.

Интервал изменения координат: $-0,45\text{м} \leq y \leq 0,45\text{м}; x = 0,6\text{м};$

Направляющие косинусы: $l = \cos 0^\circ = 1; m = \cos 90^\circ = 0;$

Интенсивность поверхностных сил:

$$\bar{X} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m = 0 \cdot 1 - 60x^2 \cdot 0 = 0;$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m = -60x^2 \cdot 1 + 120xy \cdot 0 = -60x^2 = -60 \cdot 0,6^2 = -21,6 \text{ МПа};$$

$$R_{2-3}^x = \int_{-0,45}^{0,45} \bar{X} dy \delta = \int_{-0,45}^{0,45} 0 \cdot dy \delta = 0;$$

$$R_{2-3}^y = \int_{-0,45}^{0,45} \bar{Y} dy \delta = -21,6\delta \int_{-0,45}^{0,45} dy = -21,6\delta \cdot y \Big|_{-0,45}^{0,45} = -21,6\delta \cdot (0,45 - (-0,45)) \\ = -19,44\delta;$$

$$M_{2-3} = \int_{-0,45}^{0,45} \bar{X} y dy \delta = \int_{-0,45}^{0,45} 0 \cdot y dy \delta = 0;$$

Грань 3-4.

Интервал изменения координат: $-0,6\text{м} \leq x \leq 0,6\text{м}; y = -0,45\text{м};$

Направляющие косинусы: $l = \cos 270^\circ = 0; m = \cos 180^\circ = -1;$

Интенсивность поверхностных сил:

$$\bar{X} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m = 0 - 60x^2 \cdot (-1) = 60x^2;$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m = -60x^2 \cdot 0 + 120xy \cdot (-1) = -120xy = -120 \cdot x \cdot (-0,45) = 54x;$$

Составляющие равнодействующей и момент относительно центра тяжести грани поверхностных сил будут равны:

$$R_{3-4}^x = \int_{-0,6}^{0,6} \bar{X} dx \delta = 60\delta \int_{-0,6}^{0,6} x^2 dx = 60\delta \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-0,6}^{0,6} = 20\delta \cdot (0,6^3 - (-0,6)^3) = 8,64\delta;$$

$$R_{3-4}^y = \int_{-0,6}^{0,6} \bar{Y} dx \delta = 54\delta \int_{-0,6}^{0,6} x dx = 54\delta \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-0,6}^{0,6} = 27\delta \cdot (0,6^2 - (-0,6)^2) = 0;$$

$$M_{3-4} = \int_{-0,6}^{0,6} (-\bar{Y}) x dx \delta = -54\delta \int_{-0,6}^{0,6} x^2 dx = -54\delta \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-0,6}^{0,6} = -18\delta \cdot (0,6^3 - (-0,6)^3) = -7,776\delta;$$

Грань 4-1.

Интервал изменения координат: $-0,45\text{м} \leq y \leq 0,45\text{м}; x = -0,6\text{м};$

Направляющие косинусы: $l = \cos 180^\circ = -1; m = \cos 270^\circ = 0;$

Интенсивность поверхностных сил:

$$\bar{X} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m = 0 \cdot (-1) - 60x^2 \cdot 0 = 0;$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m = -60x^2 \cdot (-1) + 120xy \cdot 0 = 60x^2 = 60 \cdot (-0,6)^2 = 21,6 \text{ МПа};$$

$$R_{4-1}^x = \int_{-0,45}^{0,45} \bar{X} dy \delta = \int_{-0,45}^{0,45} 0 \cdot dy \delta = 0;$$

$$R_{4-1}^y = \int_{-0,45}^{0,45} \bar{Y} dy \delta = 21,6\delta \int_{-0,45}^{0,45} dy = 21,6\delta \cdot y \Big|_{-0,45}^{0,45} = 21,6\delta \cdot (0,45 - (-0,45)) = 19,44\delta;$$

$$M_{4-1} = \int_{-0,45}^{0,45} \bar{X} y dy \delta = \int_{-0,45}^{0,45} 0 \cdot y dy \delta = 0;$$

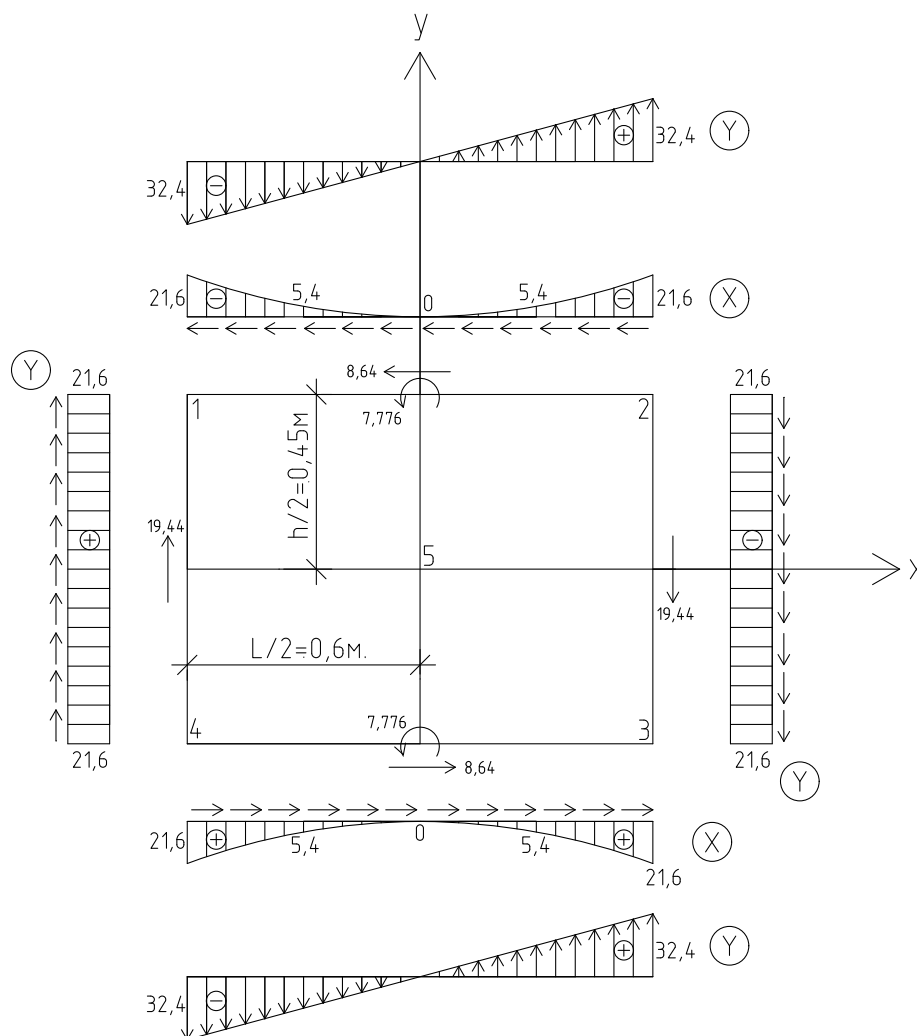
Проверка равновесия пластины в целом:

$$\sum X = R_{1-2}^x + R_{2-3}^x + R_{3-4}^x + R_{4-1}^x = -8,64\delta + 0 + 8,64\delta + 0 \equiv 0;$$

$$\sum Y = R_{1-2}^y + R_{2-3}^y + R_{3-4}^y + R_{4-1}^y = 0 - 19,44\delta + 0 + 19,44\delta \equiv 0;$$

$$\sum m_5 = M_{1-2} + R_{1-2}^x \cdot \frac{h}{2} + M_{2-3} - R_{2-3}^y \cdot \frac{L}{2} + M_{3-4} - R_{3-4}^x \cdot \frac{h}{2} + M_{4-1} + R_{4-1}^y \cdot \frac{L}{2} = -7,776\delta - 8,64\delta \cdot 0,45 + 0 + 19,44\delta \cdot 0,6 - 7,776\delta - 8,64\delta \cdot 0,45 + 0 + 19,44\delta \cdot 0,6 \equiv 0$$

					ВГТУ 21-СУЗ-18 зр. САС-211	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		



3. Перемещение пластины.

Подставим напряжения в выражение для закона Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{(\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y)}{E} = \frac{(0 - 0,24 \cdot 120xy)}{E} = -\frac{28,8xy}{E};$$

$$\varepsilon_y = \frac{(\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x)}{E} = \frac{(120xy - 0,24 \cdot 0)}{E} = \frac{120xy}{E};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2 \cdot (1 + \nu) \cdot \tau_{xy}}{E} = \frac{2,48 \tau_{xy}}{E} = \frac{2,48 \cdot (-60x^2)}{E} = -\frac{148,8x^2}{E};$$

Найденные деформации подставим в выражения Коши:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{28,8xy}{E}; \quad U = -\frac{28,8x^2y}{2E} + f(y) = -\frac{14,4x^2y}{E} + f(y);$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{120xy}{E}; \quad V = \frac{120xy^2}{2E} + g(x) = \frac{60xy^2}{E} + g(x);$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{148,8x^2}{E};$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{14,4x^2}{E} + \frac{df(y)}{dy}; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{60y^2}{E} + \frac{dg(x)}{dx};$$

$$-\frac{14,4x^2}{E} + \frac{df(y)}{dy} + \frac{60y^2}{E} + \frac{dg(x)}{dx} = -\frac{148,8x^2}{E};$$

$$\frac{df(y)}{dy} + \frac{60y^2}{E} = -\frac{134,4x^2}{E} - \frac{dg(x)}{dx};$$

$$\frac{df(y)}{dy} + \frac{60y^2}{E} = a; \quad -\frac{134,4x^2}{E} - \frac{dg(x)}{dx} = a;$$

$$f(y) = -\frac{60y^3}{3E} + ay + b = -\frac{20y^3}{E} + ay + b;$$

$$g(x) = -\frac{134,4x^3}{3E} - ax + c = -\frac{44,8x^3}{E} - ax + c;$$

$$U = -\frac{14,4x^2y}{E} - \frac{20y^3}{E} + ay + b;$$

$$V = \frac{60xy^2}{E} - \frac{44,8x^3}{E} - ax + c;$$

Постоянные а, b, с определим из заданных условий:

$$1) x=-0,6\text{м}; y=-0,45\text{м}; U=0;$$

$$0 = -\frac{14,4 \cdot (-0,6)^2 \cdot (-0,45)}{E} - \frac{20 \cdot (-0,45)^3}{E} - a \cdot 0,45 + b = \frac{4,156}{E} - a \cdot 0,45 + b;$$

$$2) x=-0,6\text{м}; y=-0,45\text{м}; V=0;$$

$$0 = \frac{60 \cdot (-0,6) \cdot (-0,45)^2}{E} - \frac{44,8 \cdot (-0,6)^3}{E} + a \cdot 0,6 + c = \frac{2,387}{E} + a \cdot 0,6 + c;$$

$$\text{Для т.2 } x=0,6\text{м}; y=0,45\text{м}; \frac{\partial V}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{60y^2}{E} - \frac{134,4x^2}{E} - a;$$

$$0 = \frac{60 \cdot 0,45^2}{E} - \frac{134,4 \cdot 0,6^2}{E} - a;$$

$$a = -\frac{36,234}{E};$$

Найдем b:

$$b = -\frac{4,156}{E} - \frac{16,305}{E} = -\frac{20,461}{E};$$

Найдем с:

$$c = \frac{21,74}{E} - \frac{2,387}{E} = \frac{19,353}{E};$$

					ВГТУ 21-СУЗ-18 гр.САС-211	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

Подставим значения производных постоянных:

$$U = -\frac{14,4x^2y}{E} - \frac{20y^3}{E} - \frac{36,234}{E} \cdot y - \frac{20,461}{E};$$

$$V = \frac{60xy^2}{E} - \frac{44,8x^3}{E} + \frac{36,234}{E} \cdot x + \frac{19,353}{E};$$

Для т.1 с координатами $x=-0,6\text{м}$; $y=0,45\text{м}$ найдем перемещение:

$$U = -\frac{14,4 \cdot (-0,6)^2 \cdot 0,45}{E} - \frac{20 \cdot 0,45^3}{E} - \frac{36,234}{E} \cdot 0,45 - \frac{20,461}{E} = -\frac{40,922}{E};$$

$$V = \frac{60 \cdot (-0,6) \cdot 0,45^2}{E} - \frac{44,8 \cdot (-0,6)^3}{E} + \frac{36,234 \cdot (-0,6)}{E} + \frac{19,353}{E} = 0;$$

Упр. №4 зачтено 26.11.23г.

					ВГТУ 21-СУЗ-18 гр.САС-211	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		